

I SISTEMI LINEARI: RISOLUZIONE

$$AX = N$$

sistema lineare di ordine $m \times n$

(il numero delle equazioni è diverso
dal numero delle incognite)



il sistema è **rettangolare**

[illegible]

sistema lineare rettangolare di ordine $m \times n$

[illegible]

sistema lineare quadrato di ordine $m=n$
con $\Delta = \det A = 0$

Teorema di Rouchè-Capelli

il sistema ammette soluzioni



$$r(A) = r(AN)$$

A è la matrice dei coefficienti del sistema
matrice incompleta

**AN è la matrice dei coefficienti del sistema cui è
stata aggiunta la colonna dei termini noti**
matrice completa

$$r(A) = r(AN) = r$$



il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni

n rappresenta il numero delle incognite del sistema

r rappresenta il rango



$$n = r$$



la soluzione
è unica



$$n > r$$



le soluzioni
sono ∞^{n-r}

$$n = r$$



si costruisce un sistema ridotto formato da r equazioni;
i coefficienti delle incognite, nel nuovo sistema,
costituiscono un minore di ordine r non nullo estratto da A ;
le soluzioni trovate per il sistema ridotto
soddisfano anche le equazioni scartate precedentemente

$$n > r$$



**si costruisce un sistema ridotto formato
da r equazioni ed r incognite con determinante
della matrice dei coefficienti diverso da zero:**

si individua un minore di ordine r non nullo estratto da AN ;

**le r righe e le r colonne del minore estratto individuano
rispettivamente le equazioni e le incognite del sistema dato;**

**delle m equazioni originarie se ne considerano solo r ;
si lasciano al primo membro tutti i termini relativi
alle r incognite sopra individuate e si portano al secondo
membro le restanti $n-r$ incognite;
si assegnano valori arbitrari alle $n-r$ incognite**



**si ottiene un sistema ridotto formato da r equazioni
in r incognite con determinante della matrice dei
coefficienti diverso da zero**



teorema di Cramer

**il sistema originario ha un'unica soluzione
(formule di Cramer)**

N.B.!

**La soluzione trovata dipende dagli $n-r$ valori arbitrari
assegnati alle incognite al secondo membro**



il sistema originario ha ∞^{n-r} soluzioni

Osservazione!

**Il Teorema di Rouchè-Capelli è un teorema di
esistenza e non esistenza delle soluzioni**



non fornisce un metodo per calcolarle



**per determinare le soluzioni
bisogna ricorrere ad altre vie**

Esempio 1

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 5 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$$

sistema lineare rettangolare 3×2 ($m \neq n$)
(3 equazioni nelle 2 incognite x, y)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{matrice incompleta}$$

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{matrice completa}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$$



$$\mathbf{r(A) = 2}$$

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$



$$\det(AN) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 20 - 8 + 2 - 20 + 8 = 0$$



$$r(AN) \neq 3$$



$$r(AN) = 2$$

$$r(A) = r(AN) = r = 2 = n$$



$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$

sistema lineare ridotto 2×2 ($m=n$)
(2 equazioni nelle 2 incognite x, y)

N.B.!

è stata scartata la terza equazione in virtù del
minore del secondo ordine non nullo considerato



la matrice dei coefficienti del sistema ridotto ha
determinante diverso da zero

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$



formule di Cramer

$$\left(x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \right)$$

$$\Delta = M = -3$$



$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 10 = 11$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7$$



$$\left(x = \frac{11}{-3}, y = \frac{7}{-3} \right)$$



$$\left(x = -\frac{11}{3}, y = -\frac{7}{3} \right)$$

$$\left(x = -\frac{11}{3}, y = -\frac{7}{3} \right)$$

è l'unica soluzione del sistema ridotto

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$$



$$\left(x = -\frac{11}{3}, y = -\frac{7}{3} \right)$$

è anche l'unica soluzione del sistema assegnato

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = 5 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$$

Esempio 2

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ -2x + 3y - 6z = -4 \end{cases}$$

sistema lineare rettangolare 2×3 ($m \neq n$)
(2 equazioni nelle 3 incognite x, y, z)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \textit{matrice incompleta}$$

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \textit{matrice completa}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$



$$r(A) = r(AN) = r = 2 < n = 3$$



il sistema originario ha $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni



$$\begin{cases} x - y = 2 - 3t \\ -2x + 3y = -4 + 6t \end{cases}$$

è il nuovo sistema 2×2 ($m=n$)

(2 equazioni nelle 2 incognite x, y)

avendo posto $z=t$ come parametro reale:

le soluzioni del sistema dipendono da un parametro

(∞^1 soluzioni $\Rightarrow$ **1 parametro);**

bisogna considerare come parametro proprio

l'incognita i cui coefficienti non fanno parte

del minore non nullo considerato

$$\begin{cases} x - y = 2 - 3t \\ -2x + 3y = -4 + 6t \end{cases}$$



formule di Cramer

$$\left(x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \quad \Delta = M = 1$$



$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 - 3t & -1 \\ -4 + 6t & 3 \end{vmatrix} = 3(2 - 3t) - (-1)(-4 + 6t) = 6 - 9t - 4 + 6t = 2 - 3t$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 - 3t \\ -2 & -4 + 6t \end{vmatrix} = -4 + 6t - (-2)(2 - 3t) = -4 + 6t + 4 - 6t = 0$$

$$\Delta_x = 2 - 3t$$

$$\Delta_y = 0$$

$$\Delta = 1$$



$(x = 2 - 3t, y = 0)$ **t parametro reale
è la soluzione del sistema ridotto**



$(x = 2 - 3t, y = 0, z = t)$ **t parametro reale
è la soluzione del sistema originario**



**∞^1 soluzioni che dipendono dal parametro t
(per ogni valore di t abbiamo una soluzione e,
poiché t varia in un insieme infinito,
che è quello dei numeri reali,
ne segue che le soluzioni sono infinite!)**